14　整数の種々の問題

122

$abc_{(7)}$， $bca_{(5)}$ は 3 桁の数だから，1 桁の数 a, b, c の値の範囲は,

$1 \le a \le 4,\ 1 \le b \le 4,\ 0 \le c \le 4$　・・・①

$abc_{(7)}$ を 10 進法で表すと， $a \cdot 7^2 + b \cdot 7^1 + c \cdot 7^0 = 49a + 7b + c$　・・・②

$bca_{(5)}$ を 10 進法で表すと， $b \cdot 5^2 + c \cdot 5^1 + a \cdot 5^0 = 25b + 5c + a$　・・・③

よって， $49a + 7b + c = 25b + 5c + a$ より， $c = 12a - \frac{9}{2}b$　・・・④

①，④より，b は 2 または 4

$b = 2$ のとき

　④より， $c = 12a - 9$

　これと①より， $a = 1,\ c = 3$

$b = 4$ のとき

　④より， $c = 12a - 18$

　したがって，①を満たす a と c は存在しない。

以上より， $(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 3)$

これを②または③に代入することにより，求める 10 進数は 66

123

解法 1

整数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha \le \beta)$ とすると，解と係数の関係より,

$\alpha + \beta = -2m - 5$　・・・①

$\alpha\beta = m + 3$　・・・②

②より， $m = \alpha\beta - 3$

これを①に代入し，整理すると， $2\alpha\beta + \alpha + \beta - 1 = 0$

よって， $4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta - 2 = 0$　すなわち $(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 3$

これと， $2\alpha + 1 \le 2\beta + 1\ (\because \alpha \le \beta)$ より， $(2\alpha + 1,\ 2\beta + 1) = (1,\ 3),\ (-3,\ -1)$

よって， $(\alpha,\ \beta) = (0,\ 1),\ (-2,\ -1)$　・・・③

③のそれぞれを②に代入し， m を求めると， $m = -3,\ -1$

解法 2

$x^2 + (2m + 5)x + (m + 3) = 0$ の解は $x = \dfrac{-(2m + 5) \pm \sqrt{4m^2 + 16m + 13}}{2}$

これが整数解であるためには $\sqrt{4m^2 + 16m + 13} = N$ （N は負でない整数）が必要

$\sqrt{4m^2 + 16m + 13} = N$ の両辺を 2 乗すると， $4m^2 + 16m + 13 = N^2$

よって，$(2m+4)^2-N^2=3$

左辺を因数分解して，$(2m+4+N)(2m+4-N)=3$

$2m+4+N \geq 2m+4-N$ より，$(2m+4+N,\ 2m+4-N)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore (m,\ N)=(-1,\ 1),\ (-3,\ 1)$

それぞれを $\dfrac{-(2m+5)\pm N}{2}$ に代入し解を求めると，

$(m,\ N)=(-1,\ 1)$ のとき，$-1,\ -2$

$(m,\ N)=(-3,\ 1)$ のとき，$0,\ 1$

となり，いずれも整数解が得られる。

よって，$m=-3,\ -1$

124

解法 1

$x^2+mx+8=0$ の解は $\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-32}}{2}$

これが有理数をもつためには,

$\sqrt{m^2-32}=\dfrac{p}{q}$ （$p,\ q$ は互いに素な自然数）と表されることが必要

$\sqrt{m^2-32}=\dfrac{p}{q}$ の両辺を 2 乗すると，$m^2-32=\dfrac{p^2}{q^2}$

これと，m^2-32 が自然数であることから，$q=1$

よって、$m^2-32=p^2$

これより，$(m+p)(m-p)=32$

また，$m,\ p$ は自然数だから，$m+p>m-p$

よって，$(m+p,\ m-p)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$

それぞれを解いて得られる自然数 m は，$m=9,\ 6$

よって，$\sqrt{m^2-32}=7,\ 4$ となり，解は有理数である。

ゆえに，$m=6,\ 9$

解法 2

$x=0$ は解でないから，有理数解を $\dfrac{p}{q}$ （$p,\ q$ は互いに素な整数）とおくと,

$\dfrac{p^2}{q^2}+m\cdot\dfrac{p}{q}+8=0 \qquad \therefore m\cdot\dfrac{p}{q}+8=-\dfrac{p^2}{q^2}$

両辺に q を掛けると，$mp+8q=-\dfrac{p^2}{q}$

左辺は整数であることと $p,\ q$ は互いに素な整数であることから，$q=\pm1$

よって，解は整数である。

そこで，整数解を$\alpha,\ \beta$とすると，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-m<0,\ \alpha\beta=8$だから，

$\alpha\leq\beta<0$かつ$\alpha\beta=8$　$\therefore(\alpha,\ \beta)=(-8,\ -1),\ (-4,\ -2)$

これと$\alpha+\beta=-m$より，$m=9,\ 6$

125

$f(1)=k,\ f(-1)=l$（$k,\ l$は整数）とすると，$a+b+1=k,\ a-b-1=l$より，

$a=\frac{k}{2}+\frac{l}{2},\ b=\frac{k}{2}-\frac{l}{2}-1$

よって，

$$f(n)=n^3+\left(\frac{k}{2}+\frac{l}{2}\right)n^2+\left(\frac{k}{2}-\frac{l}{2}-1\right)n$$
$$=n^3-n+\frac{k}{2}\cdot n(n+1)+\frac{l}{2}\cdot n(n-1)$$

ここで，$n(n+1),\ n(n-1)$は連続する2つの整数の積だから偶数である。

よって，$f(n)$は整数である。

126

(1)

解法 1

0は解でないから，有理数解$\alpha=\frac{p}{q}$（$p,\ q$は互いに素な整数）とおくと，

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3+m\left(\frac{p}{q}\right)^2+(m+8)\cdot\frac{p}{q}+1=0\quad\therefore m\left(\frac{p}{q}\right)^2+(m+8)\cdot\frac{p}{q}+1=-\left(\frac{p}{q}\right)^3$$

両辺にq^2を掛けると，$mp^2+(m+8)pq+q^2=-\frac{p^3}{q}$

左辺は整数であることと$p,\ q$は互いに素な整数であることから，$q=\pm1$

よって，αは整数である。

解法 2

0は解でないから，有理数解$\alpha=\frac{p}{q}$（$p,\ q$は互いに素な整数）とおくと，

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3+m\left(\frac{p}{q}\right)^2+(m+8)\cdot\frac{p}{q}+1=0$$

両辺にq^3を掛けると，$p^3+mp^2q+(m+8)pq^2+q^3=0$

$\therefore p^3=q\{mp^2+(m+8)pq+q^2\}$

p^3はqの倍数であることと$p,\ q$は互いに素な整数であることから，$q=\pm1$

よって，αは整数である。

(2)

$\alpha^3+m\alpha^2+(m+8)\alpha+1=0$ より，$\alpha(\alpha^2+m\alpha+m+8)=-1$

α は整数だから，$\alpha=\pm1$

$\alpha=1$ のとき

$\alpha^2+m\alpha+m+8=-1$

これと $\alpha^2+m\alpha+m+8=1+m+m+8=2m+9$ より，$2m+9=-1$　$\therefore m=-5$

$\alpha=-1$ のとき

$\alpha^2+m\alpha+m+8=1$

これと $\alpha^2+m\alpha+m+8=1-m+m+8=9$ より，$9=-1$ となり不適

以上より，$m=-5$

127

(1)

$f(3^6)-f(3)=f(27^2)-3=9-3=6$

(2)

解法 1

$n=10a+b$ （a, b は負でない整数で少なくとも一方は 0 でない）とおくと，

$f(n)=f(b)$，$f(n^5)=f(b^5)$より，$f(n^5)-f(n)=f(b^5)-f(b)$

これと，

$b=0$ のとき　$f(0^5)=0=f(0)$，$b=1$ のとき　$f(1^5)=1=f(1)$，

$b=2$ のとき　$f(2^5)=2=f(2)$，$b=3$ のとき　$f(3^5)=3=f(3)$，

$b=4$ のとき　$f(4^5)=4=f(4)$，$b=5$ のとき　$f(5^5)=5=f(5)$，

$b=6$ のとき　$f(6^5)=6=f(6)$，$b=7$ のとき　$f(7^5)=7=f(7)$，

$b=8$ のとき　$f(8^5)=8=f(8)$，$b=9$ のとき　$f(9^5)=9=f(9)$

より，$f(n^5)-f(n)=f(b^5)-f(b)=0$

解法 2

$f(n^5)-f(n)=0 \Leftrightarrow n^5$ の一の位の数と n の一の位の数が等しい

$\Leftrightarrow n^5-n$ の一の位の数が $0 \Leftrightarrow n^5-n$ は 10 の倍数である。

$$
\begin{aligned}
n^5-n&=n(n^4-1)\\
&=n(n^2-1)(n^2+1)\\
&=n(n-1)(n+1)(n^2+1)\\
&=n(n-1)(n+1)\{(n^2-4)+5\}\\
&=n(n-1)(n+1)\{(n-2)(n+2)+5\}\\
&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)
\end{aligned}
$$

ここで，連続する 5 つの自然数は 2 の倍数と 5 の倍数を含む。

また，連続する 3 つの自然数は 2 の倍数を含む。

よって，n^5-n は 10 の倍数である。ゆえに，$f(n^5)-f(n)=0$ が成り立つ。

128

解法 1

$2_{(n)}=2$，$12_{(n)}=n+2$，$1331_{(n)}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$ より，

${2^{12}}_{(n)}=1331_{(n)}$ のとき，$2^{n+2}=(n+1)^3$ が成り立つ。

よって，$n+1=2^m$（m は適当な自然数，ただし $n\geq 4$ より，$m\geq 3$）　・・・①

ゆえに，$2^{2^m+1}=2^{3m}$　すなわち $2^m+1=3m$　$\therefore 2^m=3m-1$　・・・②

ここで，②について，

$m=3$ のとき

$2^3=3\cdot 3-1$ より，②が成り立つ。

$m\geq 4$ のとき

$$
\begin{aligned}
2^m-(3m-1)&=(1+1)^m-(3m-1)\\
&={}_m\mathrm{C}_0+{}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_m-(3m-1)\\
&>{}_m\mathrm{C}_0+{}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2-(3m-1)\\
&=1+m+\frac{m(m-1)}{2}-(3m-1)\\
&=\frac{m^2-5m+4}{2}\\
&=\frac{(m-1)(m-4)}{2}\geq 0
\end{aligned}
$$

より，$2^m>3m-1$

よって，②は成り立たない。

以上より，②の解は $m=3$

ゆえに，①より，$n=7$

補足： $m\geq 4$ のとき $2^m>3m-1$ であることを数学的帰納法で示す。

$m\geq 4$ のとき $2^m>3m-1$ すなわち $2^m-(3m-1)$　・・・③

が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(i)　$m=4$ のとき

$2^4-(3\cdot 4-1)=5>0$

よって，③が成り立つ。

(ii)　$m=k$ $(k\geq 4)$ のとき③が成り立つと仮定する。

仮定より，$2^k-(3k-1)>0$ すなわち $2^k>3k-1$ が成り立つ。

$m=k+1$ のとき，

$2^{k+1}-\{3(k+1)-1\}=2\cdot 2^k-(3k+2)>2\cdot(3k-1)-(3k+2)=3k-4>0$

よって，$m=k+1$ のときも③が成り立つ。

(i)，(ii)より，③が成り立つ。

解法 2

$2_{(n)}=2$，$12_{(n)}=n+2$，$1331_{(n)}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$ より，

$2^{12}{}_{(n)}=1331_{(n)}$ のとき，$2^{n+2}=(n+1)^3$　・・・①　が成り立つ。

$n=4,\ 6$ のとき

2^{n+2} は偶数，$(n+1)^3$ は奇数

よって，①が成り立たない。

$n=5$ のとき

$2^{5+2}=2^7$，$(5+1)^3=6^3=2^3\cdot 3^3$ より，①が成り立たない。

$n=7$ のとき

$2^{7+2}=2^9$，$(7+1)^3=8^3=2^9$ より，①が成り立つ。

$n\geq 8$ のとき

$2^{n+2}>(n+1)^3$　・・・②　が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(i)　$n=8$ のとき

$2^{8+2}=2^{10}=1024$，$(8+1)^3=3^6=729$ より，②が成り立つ。

(ii)　$n=k\ (k\geq 8)$ のとき②が成り立つと仮定する。

仮定より，$2^{k+2}>(k+1)^3$

よって，$2^{(k+1)+2}=2\cdot 2^{k+2}>2(k+1)^3$

ここで，$f(x)=2(x+1)^3-(x+2)^3\ (x\geq 8)$ とおくと，

$f'(x)=6(x+1)^2-3(x+2)^2=3(x^2-2)>0$ より，$f(x)$ は単調増加する。

よって，$f(x)\geq f(8)=2\cdot(8+1)^3-(8+2)^3=458>0$　$\therefore 2(k+1)^3-(k+2)^3>0$

よって，$2^{(k+1)+2}>(k+2)^3=\{(k+1)+1\}^3$

ゆえに，$n=k+1$ のときも②が成り立つ。

(i)，(ii)より，②が成り立つ。

ゆえに，$n\geq 8$ のとき①が成り立たない。

以上より，$n=7$

129

(1)

$3x>0,\ x^2+2>0$ より，$3x \geq x^2+2$ が成り立つことが必要であり，

これが成り立つ x は，$3x \geq x^2+2$ を解くことにより，$x=1,\ 2$

また，$x=1$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=1$，$x=2$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=1$ より，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ は自然数

よって，$x=1,\ 2$

(2)

$x=1,\ 2$ のとき

(1)より，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{y}$　$\therefore y=1$

$x \geq 3$ のとき

(1)より，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$　これと $0<\dfrac{1}{y}\leq 1$ より，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<2$

よって，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数ならば $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}=1$　・・・①

また，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$ だから，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数ならば $\dfrac{1}{y}$ は整数ではない。

よって，$y \geq 2$ より，$0<\dfrac{1}{y}\leq\dfrac{1}{2}$

したがって，必要条件は $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{3x}{x^2+2}$　・・・②

②の両辺に $2(x^2+2)$ を掛け，これを整理すると，$x^2-6x+2\leq 0$　$\therefore 3-\sqrt{7}\leq x\leq 3+\sqrt{7}$

これと $x\geq 3,\ 5<3+\sqrt{7}<6$ より，②を満たす x は $3,\ 4,\ 5$

そこで，それぞれを①に代入し，①が自然数となるか調べる。

$x=3$ のとき

$\dfrac{9}{11}+\dfrac{1}{y}=1$ より，$y=\dfrac{11}{2}$　よって，不適

$x=4$ のとき

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{y}=1$ より，$y=3$　よって，①は自然数となる。

$x=5$ のとき

$\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{y}=1$ より，$y=\dfrac{9}{4}$　よって，不適

以上より，$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 3)$

補足

$x \geq 3$ のときを①に頼らないで解く場合

$x=3$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=\frac{9}{11}+\frac{1}{y}=\frac{9y+11}{11y}$$

分子と分母の差をとると，$(9y+11)-11y=-2y+11$ より，奇数となる。

すなわち，分母と分子の偶奇が一致しない。

よって，$\dfrac{9y+11}{11y}$ は自然数になれない。

$x=4$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}+\frac{1}{y}=\frac{2y+3}{3y}$$

$2y+3 \geq 3y$ すなわち $y \leq 3$ が必要だから，これを満たす y は1, 2, 3

これらのうち $\dfrac{2y+3}{3y}$ が自然数となる y は 3 である。

$x=5$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=\frac{5}{9}+\frac{1}{y}=\frac{5y+9}{9y}$$

$x=3$ のときと同様，分母と分子の偶奇が一致しない。

よって $\dfrac{5y+9}{9y}$ は自然数になれない。

130

(1)

$n=2m$ （m は自然数）とおくと，

$$\begin{aligned}2^n-1 &\equiv 2^{2m}-1\\ &\equiv 4^m-1\\ &\equiv 1^m-1\\ &\equiv 0 \pmod 3\end{aligned}$$

よって，題意が成り立つ。

(2)

2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とすると，

$2^n+1-(2^n-1)=2$ より，2 は g を約数にもつ。

よって，g は 2^n+1 と 2 の公約数である。

一方，2^n+1 は奇数だから，2 を約数にもたない。

よって，$g=1$

ゆえに，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である。

(3)

$2^{p-1}-1=pq^2$ について

$p=2$ とすると，$1=2q^2$ より，$q^2=\dfrac{1}{2}$ となり，q は素数ではないから不適。

よって，p は 3 以上の素数であり，3 以上の素数は奇数であるから，
$p-1$ は正の偶数である。

よって，(1)より，$2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。
ゆえに，$p=3$ または $q=3$ ・・・①
また，$2^{p-1}-1=pq^2$ より，

$$\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=pq^2 \quad ・・・②$$

$p-1$ は正の偶数だから，$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数である。

よって，(2)より，

$2^{\frac{p-1}{2}}+1$ と $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は互いに素である。 ・・・③

①において，$p=3$ とすると，②で $3=3q^2$ $\therefore q=1$ 1 は素数でないから不適。
よって，$q=3$

このとき，②より，$\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=p\cdot 3^2$

これと③および $2^{\frac{p-1}{2}}+1>2^{\frac{p-1}{2}}-1$ から，

考えられる $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1,\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)$ の組は，$\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1,\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=\left(p\cdot 3^2,\ 1\right), \left(p,\ 3^2\right), \left(3^2,\ p\right)$

$\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1,\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=\left(p\cdot 3^2,\ 1\right)$ のとき

$2^{\frac{p-1}{2}}-1=1$ より，$2^{\frac{p-1}{2}}=2$

よって，$\dfrac{p-1}{2}=1$ より，$p=3$

これは $2^{\frac{p-1}{2}}+1=p\cdot 3^2$ を満たさない。よって，不適。

$\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1,\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=\left(p,\ 3^2\right)$のとき

$2^{\frac{p-1}{2}}-1=3^2$ より，$2^{\frac{p-1}{2}}=10$

$\dfrac{p-1}{2}$ は自然数であるが，$10=2^x$ とすると，x は自然数ではない。よって，不適。

$\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1,\ 2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=\left(3^2,\ p\right)$のとき

$2^{\frac{p-1}{2}}+1=3^2$ より，$2^{\frac{p-1}{2}}=8=2^3$

よって，$\dfrac{p-1}{2}=3$ より，$p=7$

これは $2^{\frac{p-1}{2}}-1=p$ を満たす。

以上より，$p=7,\ q=3$

131

直角三角形の 3 辺の長さを $a,\ b,\ c$，c を斜辺の長さとすると，

三平方の定理より，$a^2+b^2=c^2$　・・・①

面積は $\dfrac{ab}{2}$　・・・②

$a,\ b$ がともに偶数のとき

$a=2k,\ b=2l$（$k,\ l$ は整数）とおくと，①のとき，$4k^2+4l^2=c^2$

よって，$c=2m$ とおくと，m は $m^2=k^2+l^2$ を満たす自然数であればよく，
たとえば，$(k,\ l,\ m)=(3,\ 4,\ 5)$ はこれを満たす。

したがって，①を満たす c は存在し，このとき，②より，面積は $\dfrac{ab}{2}=2kl$

すなわち 2 の整数倍である。

$a,\ b$ のどちらか一方が奇数のとき

$a=2k,\ b=2l+1$（$k,\ l$ は整数）とおくと，①のとき，$4\left(k^2+l^2+l\right)+1=c^2$

よって，c^2 を 4 で割った余りは 1 であり，$c=2m+1$（m は自然数）とおくと，
$c^2=4\left(m^2+m\right)+1$ となり，これを満たす。

このような $a,\ b,\ c$ にはたとえば，$(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 5)$ がある。

このとき，$4\left(k^2+l^2+l\right)+1=4\left(m^2+m\right)+1$ より，$k^2+l^2+l=m^2+m$

$\therefore k^2=(m-l)(m+l+1)$

ここで，$m+l+1$ と $m-l$ の差をとると，$(m+l+1)-(m-l)=2l+1$ より，奇数となる。
よって，$m+l+1$ と $m-l$ の偶奇が一致しない。
すなわち $m+l+1$ と $m-l$ のどちらか一方は偶数である。
よって，k^2 は偶数，すなわち，k は偶数である。
これより，a は 4 の倍数となるから，面積は $\frac{ab}{2}$ は 2 の整数倍である。

$a,\ b$ がともに奇数のとき
$a=2k+1,\ b=2l+1$ （$k,\ l$ は整数）とおくと，
①のとき，$4(k^2+l^2+k+l)+2=c^2$
よって，c は c^2 を 4 で割った余りが 2 となるような数であればよい。
ところが，
$c=2m$ （m は自然数）とおくと，$c^2=4m^2$
$c=2m+1$ （m は自然数）とおくと，$c^2=4(m^2+m)+1$
となり，c^2 を 4 で割っても余りは 1 とならない。
よって，$a,\ b$ がともに奇数となるような直角三角形は存在しない。

以上より，直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍である。

132

(1)

$$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x$$
$$=\frac{x(2x+3)}{6}$$

より，
$x=6k$ （k は整数）とおくと，$y=2k^2+3k$ となり，y も整数である。
よって，$(6k,\ 2k^2+3k)$ は格子点である。
また，整数 k は無限個存在する。
ゆえに，格子点は無限個存在する。

(2)

$y=ax^2+bx$ のグラフ上の点 $(0,\ 0)$ 以外の 2 つの格子点を $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ とおくと，
$y_1=a{x_1}^2+bx_1$ 　・・・①
$y_2=a{x_2}^2+bx_2$ 　・・・②
$①\times x_2-②\times x_1$ より，$x_2y_1-x_1y_2=ax_1x_2(x_1-x_2)$
$①\times {x_2}^2-②\times {x_1}^2$ より，${x_2}^2y_1-{x_1}^2y_2=bx_1x_2(x_2-x_1)$
$x_1\neq x_2,\ x_1\neq 0,\ x_2\neq 0$ より，$x_1x_2(x_1-x_2)\neq 0$

$$\therefore (a,\ b)=\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1x_2(x_1-x_2)},\ \frac{{x_1}^2y_2-{x_2}^2y_1}{x_1x_2(x_1-x_2)}\right)$$

ゆえに，

$$y=ax^2+bx$$
$$=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1x_2(x_1-x_2)}x^2+\frac{x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1}{x_1x_2(x_1-x_2)}x$$
$$=\frac{x}{x_1x_2(x_1-x_2)}\{(x_2y_1-x_1y_2)x+x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1\}$$

ここで， $x=kx_1x_2(x_1-x_2)$ （k は整数）とおくと，

$$y=k^2x_1x_2(x_1-x_2)(x_2y_1-x_1y_2)+k(x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1)$$

これと， k, x_1, x_2 は整数であることから，

$y=ax^2+bx$ のグラフ上の点 $\left(kx_1x_2(x_1-x_2),\ k^2x_1x_2(x_1-x_2)(x_2y_1-x_1y_2)+k(x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1)\right)$

は格子点であり，整数 k は無限個存在する。

よって，格子点は無限個存在する。